К ЗАДАЧЕ О ДИФФУЗНОМ ОТРАЖЕНИИ СВЕТА

Рассмотрена задача о диффузном отражении света рассеивающей средой, состоящей из плоскопараллельных слоев. При этом строго учитываются многократные рассеяния. Индикатриса рассеяния (диаграмма углового распределения рассеянных лучей при элементарном акте рассеяния) принимается произвольной.

Задача о диффузном отражении света средой, каждый элементарный объем которой производит поглощение и рассеяние (мутная среда), служила предметом многочисленных исследований. Однако до сих пор, даже в простейшем случае среды, состоящей из плоскопараллельных слоев и параллельного пучка падающих на границу среды лучей, не было найдено решение. В настоящей работе будет показано, что в этом случае задача решается довольно простыми методами.

Пусть среда, состоящая из плоскопараллельных слоев, ограничена с одной стороны некоторой плоскостью A, а с другой простирается в бесконечность. На плоскость A падает параллельный пучок, который далее проникает в глубь среды, испытывая поглощение и рассеивания. Обозначим угол, образованный направлением лучей с внутренней нормалью, через θ_0. Пусть далее направление падающих лучей имеет азимут φ_0, отсчитанный от некоторого заранее заданного направления на плоскости A.

Обычный метод изучения задачи заключался в том, что рассматривалось уравнение переноса:

$$\cos\theta \frac{\partial I(\tau, \theta, \varphi)}{\partial\tau} = I(\tau, \theta, \varphi) - B(\tau, \theta, \varphi), \tag{1}$$

и обобщенное условие лучевого равновесия:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4\pi}\iint x(\cos\gamma)\, I(\tau, \theta', \varphi')\, d\omega' + \frac{\lambda}{4} Se^{-\tau\sec\theta_0} x(\cos\gamma_1), \tag{2}$$

* ЖЭТФ, **13**. вып. 9—10, 224, 1943.

выражающее тот факт, что излучение единицы объема складывается из энергий, рассеянных этой единицей объема от лучей, идущих в разных направлениях через него, и энергии, рассеянной той же единицей объема от первоначального пучка, ослабленного по пути $e^{-\tau\sec\theta_0}$ раз. В этих уравнениях $I(\tau, \theta, \varphi)$ есть интенсивность диффузного излучения на оптической глубине τ, образующего угол θ с внешней нормалью и имеющего азимут φ. Оптическая глубина τ определяется для обычной линейной глубины z, отсчитанной от границы A, через объемный коэффициент экстинкции света $\alpha(z)$ с помощью формулы

$$\tau = \int_0^z \alpha(z)\, dz.$$

$B(\tau, \theta, \varphi)$ означает отдачу, определяемую через коэффициент излучения $\eta, (\tau, \theta, \varphi)$ на глубине τ, в направлении θ, φ и α:

$$B(\tau, \theta, \varphi) = \frac{\eta(\tau, \theta, \varphi)}{\alpha}.$$

λ—есть отношение коэффициента чистого рассеяния к сумме коэффициентов поглощения и чистого рассеяния. πS есть поток внешнего излучения, падающий на единичную площадку, перпендикулярную к нему. Наконец, $x(\cos\gamma)$ есть функция, называемая индикатрисой рассеяния, которая дает относительное распределение излучения, рассеянного элементом объема из направления θ, φ по направлениям θ', φ' в зависимости от угла рассеяния γ между этими направлениями, определяемого формулой

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi'). \tag{3}$$

Мы будем также вместо $x(\cos\gamma)$ писать:

$$x(\theta, \varphi; \theta', \varphi') = x(\cos\gamma).$$

Что касается угла γ_1 между направлением θ, φ и направлением внешнего излучения, то

$$\cos\gamma_1 = -\cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Обычно уравнения (1) и (2) решаются приближенно, посредством более или менее грубых усреднений по углам, или же система (1) и (2) решается посредством приведения к одному интегральному уравнению для неизвестной функции $B(\tau, \theta, \varphi)$. Из этой функции $B(\tau, \theta, \varphi)$ уже посредством интегрирования получается интенсивность выходящего из среды излучения. Мы же приведем задачу к некоторому функциональному уравнению, которое в дальнейшем и разрешим.

Вывод функционального уравнения. Заметим, что величины I и B, входящие в (1), зависят не только от аргументов θ и φ, но также от аргументов θ_0, φ_0, как от параметров, характеризующих направление внешнего излучения. В частности, значение I при $\tau=0$, т. е. интенсивность выходящего с границы диффузного излучения $I(0, \theta, \varphi)$, которое мы будем называть диффузно-отраженным излучением, будет также зависеть от θ_0, φ_0 как от параметров. Интенсивность этого излучения обозначим теперь через

$$I(0, \theta, \varphi) = r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S.$$

Поскольку линейность задачи обусловливает пропорциональность интенсивности падающему потоку πS, функция $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)$ и характеризует диффузную отражательную способность нашей среды. Если на среду падает не пучок параллельных лучей, а излучение, идущее из разных направлений θ_0, φ_0, где θ_0 по-прежнему угол излучения с внутренней нормалью, то интенсивность диффузно-отраженного света $I_2(\theta, \varphi)$ будет равна:

$$I_2(\theta, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) I_1(\theta_0, \varphi_0) \sin \theta_0 \, d\theta_0 d\varphi_0. \tag{4}$$

Функцию r мы и будем искать. Будем ее называть функцией отражения.

Вернемся к случаю параллельного пучка лучей и проведем плоскость A' на оптической глубине $d\tau$ от граничной плоскости A. На плоскости A' мы имеем два рода излучений, идущих внутрь: прямое πS, ослабленное до величины $\pi S(1 - d\tau \sec \theta_0)$, и диффузное от вышележащего слоя оптической толщины $d\tau$. Его интенсивность, как это непосредственно видно из уравнения переноса, равна:

$$-B(0, \theta, \varphi) \sec \theta \, d\tau,$$

где $\sec \theta < 0$ так, как для лучей, идущих вглубь, угол с внешней нормалью $\theta > \frac{\pi}{2}$. Если введем вместо θ угол с внутренней нормалью $\theta' = \pi - \theta$, то та жа интенсивность выразится через

$$B(0, \pi - \theta', \varphi) \sec \theta' \, d\tau.$$

Та часть среды, которая лежит под A', отражает диффузно оба эти излучения. При этом функция r, характеризующая отражение, будет та же самая, так как отнятие слоя $d\tau$ от среды бесконечной оптической толщины, так же как вообще отнятие слоя любой оптической толщины, не может изменить диффузную отражательную способность среды. Эта инвариантность диффузно-отражательной способности по отношению к отнятию или прибавлению слоя конечной или бесконечно малой оптической толщины и является исходным пунктом для нашего метода.

Пользуясь определением функции r, мы найдем, что от A' должна отражаться в направлении θ, φ интенсивность

$$Sr(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)(1 - d\tau \sec \theta_0) +$$
$$+ \frac{d\tau}{\pi} \int\int r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') B(0, \pi - \theta', \varphi') \sec \theta' \sin \theta' d\theta' d\varphi'.$$

С другой стороны, на основании того же уравнения переноса можно прямо написать интенсивность излучения, идущего наружу от плоскости A'. В самом деле, при $\tau = 0$ интенсивность излучения, идущего наружу, равна $r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S$. Следовательно, согласно уравнению переноса, на глубине $d\tau$ она будет равна:

$$Sr(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0)(1 + d\tau \sec \theta) - B(0, \theta, \varphi) \sec \theta \, d\tau.$$

Приравнивая эти два выражения для интенсивности лучей, идущих от плоскости A' наружу, получаем:

$$(\sec \theta + \sec \theta_0) r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) S =$$
$$= B(0, \theta, \varphi) \sec \theta + \frac{1}{\pi} \int\int r(\theta, \varphi; \theta', \varphi') B(0, \pi - \theta', \varphi') \operatorname{tg} \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (5)$$

С другой стороны, полагая в (2) $\tau = 0$, находим для $B(0, \theta, \varphi)$:

$$B(0, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4} Sx(\cos \gamma_1) + \frac{\lambda S}{4\pi} \int\int x(\cos \gamma_1) I(0, \theta', \varphi') \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

или, поскольку

$$I(0, \theta', \varphi') = Sr(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0),$$

имеем:

$$B(0, \theta, \varphi) = \frac{\lambda}{4} Sx(\cos \gamma_1) + \frac{\lambda S}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x(\theta, \varphi; \theta', \varphi') r(\theta', \varphi'; \theta_0, \varphi_0) \sin \theta' d\theta' d\varphi'. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), находим:

$$(\sec \theta + \sec \theta_0) r(\theta, \varphi; \theta_0, \varphi_0) = \frac{\lambda}{4} x(\cos \gamma_1) \sec \theta +$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\sec\theta\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}x(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\,r(\theta',\varphi';\theta_0,\varphi_0)\sin\theta'\,d\theta'\,d\varphi'+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\,x(\theta',\varphi';\theta_0,\varphi_0)\,\mathrm{tg}\,\theta'\,d\theta'\,d\varphi'+$$

$$+\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}r(\theta,\varphi;\theta',\varphi')\,x(\pi-\theta',\varphi';\theta'',\varphi'')\,r(\theta'',\varphi'';\theta_0,\varphi_0)\times$$

$$\times\,\mathrm{tg}\,\theta'\sin\theta''\,d\theta'\,d\varphi'\,d\theta''\,d\varphi''. \qquad (7)$$

Это и есть основное функциональное уравнение, которому подчиняется функция $r(\theta,\varphi;\theta_0,\varphi_0)$, характеризующая диффузное отражение. Для сокращения письма удобнее считать аргументом функции r и x не θ, а $\eta=\cos\theta$. В соответствии с этим будем писать также: $\cos\theta'=\eta'$; $\cos\theta''=\eta''$. Тогда наше функциональное уравнение перепишется в виде:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right)r(\eta,\varphi;\eta_0,\varphi_0)=\frac{\lambda}{4\eta}x(\eta,\varphi;-\eta_0,\varphi_0)+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi\eta}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}x(\eta,\varphi;\eta',\varphi')\,r(\eta',\varphi';\eta_0,\varphi_0)\,d\eta'\,d\varphi'+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int^{1}r(\eta,\varphi;\eta',\varphi')\,x(\eta',\varphi';\eta_0,\varphi_0)\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'+$$

$$+\frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{1}r(\eta,\varphi;\eta',\varphi')\,x(-\eta',\varphi';\eta'',\varphi'')\,r(\eta'',\varphi'';\eta_0,\varphi_0)\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'\,d\eta''d\varphi''. \qquad (8)$$

Это уравнение примет более симметричную форму, если мы подставим

$$r(\eta,\varphi;\eta_0,\varphi_0)=\frac{\lambda}{4\eta}R(\eta,\varphi;\eta_0,\varphi_0). \qquad (9)$$

В самом деле, мы будем иметь:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right) R\,(\eta,\,\varphi;\,\eta_0,\,\varphi_0) = x\,(\eta,\,\varphi;-\eta_0,\,\varphi_0) +$$
$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 x\,(\eta,\,\varphi;\,\eta',\,\varphi')\,R\,(\eta',\,\varphi';\,\eta_0,\,\varphi_0)\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi' +$$
$$+\frac{\lambda}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 R\,(\eta,\,\varphi;\,\eta',\,\varphi')\,x\,(\eta',\,\varphi';\,\eta_0,\,\varphi_0)\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi' +$$
$$+\frac{\lambda^2}{16\pi^2}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 R(\eta,\varphi;\,\eta',\varphi')\,x(-\eta',\varphi';\,\eta'',\varphi'')\,R(\eta'',\varphi'';\,\eta_0,\varphi_0)\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,d\varphi'\,\frac{d\eta''}{\eta''}\,d\varphi''. \tag{10}$$

Обратим внимание на следующее свойство этого уравнения: если ему удовлетворяет некоторая функция $R(\eta,\,\varphi;\,\eta_0,\,\varphi_0)$, то ему же должна удовлетворять функция $R(\eta_0,\,\varphi_0;\,\eta,\,\varphi)$ с переставленными аргументами. С другой стороны, поскольку решение нашей физической задачи единственное, то можно ожидать, что и уравнение (10) имеет единственное регулярное решение. Тогда мы вследствие приведенного свойства нашего уравнения должны заключить, что

$$R\,(\eta,\,\varphi;\,\eta_0,\,\varphi_0) = R\,(\eta_0,\,\varphi_0;\,\eta,\,\varphi), \tag{11}$$

т. е., что функция R симметричная. Это находится в полном соответствии с тем, что симметрия выражения

$$\eta r\,(\eta,\,\varphi;\,\eta_0,\,\varphi_0) = \frac{\lambda}{4}\,R\,(\eta,\,\varphi;\,\eta_0,\,\varphi_0)$$

следует непосредственно из физических соображений [1].

Представление индикатрисы через полиномы Лежандра. При эмпирическом определении индикатрисы рассеяния для заданной среды, а также при некоторых теоретических выводах (формула Релея) она представляется в виде конечной суммы полиномов Лежандра. В общем случае индикатриса может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра. Если в представлении всего $n+1$ членов, то

$$x\,(\cos\gamma) = \sum_{i=0}^{n} x_i P\,(\cos\gamma). \tag{12}$$

Поскольку функция $x\,(\cos\gamma)$ дает относительное распределение рассеянного света по направлениям при элементарном акте рассеяния, она должна удовлетворять условию нормировки:

$$\frac{1}{4\pi}\int\int x(\cos\gamma)\,d\omega = 1$$

или

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi x(\cos\gamma)\sin\gamma\,d\gamma = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{+1} x(\eta)\,d\eta = 1. \qquad (13)$$

Условие (13) дает для первого коэффициента в ряде (12) во всех случаях значения $x_0 = 1$.

В случае сферической индикатрисы рассеяния, мы имеем просто

$$x(\cos\gamma) = 1,$$

т. е. только один член разложения.

В случае релеевой индикатрисы рассеяния

$$x(\cos\gamma) = \frac{3}{4}(1 + \cos^2\gamma) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right) = P_0(\cos\gamma) +$$

$$+ \frac{1}{2}P_2(\cos\gamma).$$

Таким образом, в этом случае $x_0 = 1$ и $x_2 = \frac{1}{2}$, а все остальные коэффициенты равны нулю.

Представляет также значительный интерес группа вытянутых индикатрис рассеяния типа

$$x(\eta) = 1 + x_1\eta,$$

где величина x_1 характеризует степень вытянутости индикатрисы в направлении падающего луча.

В дальнейшем мы воспользуемся разложением (12) для решения основного функционального уравнения (10), считая, что n может быть как конечным, так и бесконечным.

Решение основного функционального уравнения. Согласно известной формуле сложения шаровых функций,

$$P_i(\cos\gamma) = P_i(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi - \varphi')) = P_i(\cos\theta)P_i(\cos\theta') +$$

$$+ 2\sum^{i}\frac{(i-m)!}{(i+m)!}P_i^m(\cos\theta)P_i^m(\cos\theta')\cos m(\varphi - \varphi').$$

Поэтому индикатрису рассеяния $x(\cos\gamma)$ можно представить в виде:

$$x(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\cos\theta) P_i^m(\cos\theta') \cos m(\varphi - \varphi') =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \tag{14}$$

где

$$c_{i0} = x_i \tag{14'}$$

и

$$c_{im} = 2x_i \frac{(i-m)!}{(i+m)!}, \tag{14''}$$

или же в форме:

$$x(\cos\gamma) = \sum_{m=0}^{\infty} q_m(\eta, \eta') \cos m(\varphi - \varphi'), \tag{15}$$

где

$$q_m(\eta, \eta') = \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta') \tag{15'}$$

являются симметричными функциями своих аргументов.

Обратим внимание на то обстоятельство, что функции отражения r, а следовательно, и R должны также зависеть только от разности азимутов $\varphi - \varphi_0$ падающего и отраженного света, так как они должны быть инвариантны по отношению к преобразованию начала отсчета аргументов:

$$\bar{\varphi} = \varphi - a,$$

$$\bar{\varphi}_0 = \varphi_0 - a.$$

При этом R должна быть четной функцией $\varphi - \varphi_0$, так как она должна быть инвариантна по отношению к перемене направления отсчета азимутов. В силу этого в разложении Фурье функции R по аргументу $\varphi - \varphi_0$ должны отсутствовать синусы, и само разложение должно иметь вид:

$$R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta, \eta_0) \cos m(\varphi - \varphi_0). \tag{16}$$

Нашей задачей и должно быть нахождение функций $f_m(\eta, \eta_0)$, т. е. коэффициентов разложения Фурье функции R.

Подставим (16) и (15) в (10). Найдем:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right)\sum_{m=0}^{\infty} f_m(\eta, \eta_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)=\sum_{m=0}^{\infty} q_m(\eta, -\eta_0)\cos m(\varphi-\varphi_0)+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos m(\varphi-\varphi_0)}{2-\delta_{0m}}\int_0^1 q_m(\eta, \eta')\, f_m(\eta', \eta_0)\frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos m(\varphi-\varphi_0)}{2-\delta_{0m}}\int_0^1 q_m(\eta', \eta_0)\, f_m(\eta, \eta')\frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda^2}{4}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\cos m(\varphi-\varphi_0)}{(2-\delta_{0m})^2}\int_0^1\int_0^1 f_m(\eta, \eta')\, q_m(-\eta', \eta'')\, f_m(\eta'', \eta_0)\frac{d\eta'}{\eta'}\frac{d\eta''}{\eta''},$$

где множитель $2-\delta_{0m}$ в знаменателе есть выражение, равное единице при $m=0$ и двум при $m>0$.

Приравнивая коэффициенты при $\cos m(\varphi-\varphi_0)$ в обеих частях полученного равенства, находим:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0)=q_m(\eta, -\eta_0)+\frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})}\int_0^1 q_m(\eta, \eta')\, f_m(\eta', \eta_0)\frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})}\int_0^1 q_m(\eta', \eta_0)\, f_m(\eta, \eta')\frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda^2}{4(2-\delta_{0m})^2}\int_0^1\int_0^1 f_m(\eta, \eta')\, q_m(-\eta', \eta'')\, f_m(\eta'', \eta_0)\frac{d\eta'}{\eta'}\frac{d\eta''}{\eta''}. \qquad (17)$$

Таким образом, для нахождения каждого из коэффициентов Фурье $f_m(\eta, \eta')$ находим отдельное функциональное уравнение. Мы видим, что можно отыскивать каждую из функций $f_m(\eta, \eta')$ независимо от других.

Из формул (14) и (15) очевидно, что если разложение индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра содержит только конечное число членов, так что n есть порядок наивысшего члена разложения, то все $q_m(\eta, \eta_0)$ при $m>n$ равны нулю. Уравнения (17) показывают, что тогда и f_m при $m > n$ равны нулю. Таким образом, в разложении Фурье (16) функции отражения число членов равно порядку наивысшего члена в разложении (12) индикатрисы рассеяния по полиномам Лежандра.

Теперь исследуем уравнения (17) для функций $f_m(\eta, \eta_0)$. Для этого подставим (15) в (17). Имеем:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0)=\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+m} c_{im} P_i^m(\eta) P_i^m(\eta_0)+$$

$$+\frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta) \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta', \eta_0) \frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda}{2(2-\delta_{0m})} \sum_{i=m}^{\infty} c_{im} P_i^m(\eta_0) \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'}+$$

$$+\frac{\lambda^2}{4(2-\delta_{0m})^2} \sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+m} c_{im} \int_0^1 P_i^m(\eta') f_m(\eta, \eta') \frac{d\eta'}{\eta'} \int_0^1 P_i^m(\eta'') f_m(\eta'', \eta_0) \frac{d\eta''}{\eta''}.$$

Мы видим, что правая часть может быть представлена в виде суммы некоторых произведений:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0)=$$

$$=\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+m} c_{im}\left\{P_i^m(\eta)+\frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 f_m(\eta, \eta') P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'}\right\} \times$$

$$\times\left\{P_i^m(\eta_0)+\frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})} \int_0^1 f(\eta', \eta_0) P_i^m(\eta') \frac{d\eta'}{\eta'}\right\}. \qquad (18)$$

В силу симметрии функций $f_m(\eta, \eta_0)$ два множителя в скобках, стоящие в каждом члене суммы в формуле (18), представляют собою одинаковые функции, одна от η, другая от η_0. Иными словами, (18) можно переписать в виде:

$$\left(\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta_0}\right) f_m(\eta, \eta_0)=\sum_{i=m}^{\infty}(-1)^{i+m} c_{im} \varphi_i^m(\eta) \varphi_i^m(\eta_0), \qquad (19)$$

где

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda(-1)^{i+m}}{2(2-\delta_{0m})}\int_0^1 f_m(\eta, \eta')\, P_i^m(\eta')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,. \tag{20}$$

Из уравнения (19) следует, что функции $f_m(\eta, \eta_0)$ имеют структуру:

$$f_m(\eta, \eta_0) = \sum_{i=m}^{\infty} (-1)^{i+m}\,\frac{c_{im}\varphi_i^m(\eta)\,\varphi_i^m(\eta_0)}{\dfrac{1}{\eta}+\dfrac{1}{\eta_0}}\,. \tag{21}$$

Уравнения для вспомогательных функций $\varphi_i^m(\eta)$ получим, подставляя (21) в правую часть (20):

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda(-1)^{m+i}}{2(2+\delta_{0m})}\int_0^1 \sum_{k=m}^{\infty}\frac{(-1)^{k+m}c_{km}\,\varphi_k^m(\eta)\,\varphi_k^m(\eta')}{\dfrac{1}{\eta}+\dfrac{1}{\eta'}}\,P_i^m(\eta')\,\frac{d\eta'}{\eta'}\,,$$

или

$$\varphi_i^m(\eta) = P_i^m(\eta) + \frac{\lambda}{2}\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^{i+k}\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\,\eta\int_0^1 \frac{x_k\varphi_k^m(\eta)\,\varphi_k^m(\eta')\,P_i^m(\eta')}{\eta+\eta'}\,d\eta', \tag{22}$$

так как

$$c_{km} = (2-\delta_{0m})\,x_k\,\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\,.$$

Полагая $i = m, m+1, \ldots$, мы получаем из (22) систему функциональных уравнений для неизвестных функций $\varphi_m^m(\eta), \varphi_{m+1}^m(\eta), \ldots$. Число неизвестных функций равно при каждом m числу уравнений. Если наивысший порядок присутствующего в разложении (12) полинома Лежандра равен n, то число всех неизвестных функций равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, так же как и число функциональных уравнений. Однако вся совокупность уравнений распадается на ряд различных подсистем, соответствующих различным m. Подсистема для функций φ_i^m, где m фиксировано, может быть разрешена самостоятельно, независимо от других подсистем.

Таким образом, наше исследование определяет неизвестную функцию R от четырех переменных с помощью формул (16) и (21) через некоторую совокупность функций одного переменного φ_i^m, причем сами эти вспомогательные функции определяются из системы функциональных уравнений (22).

Такое представление R особенно удобно в случае конечности разложения (12) индикатрисы рассеяния. Это будет видно на приведенных ниже частных примерах.

Сферическая индикатриса рассеяния. В этом случае

$$x(\cos\gamma) = 1, \tag{23}$$

и все x_i при $i>0$ равны нулю. Наивысший порядок полинома в разложении индикатрисы рассеяния равен нулю. Поэтому в разложении (16) остается лишь один член, соответствующий $m=0$,

$$R = f_0(\eta, \eta_0). \tag{24}$$

Формула (21) сводится в этом случае к

$$f_0(\eta, \eta_0) = R = \frac{\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\eta_0)}{\dfrac{1}{\eta} + \dfrac{1}{\eta_0}}, \tag{25}$$

и единственная вспомогательная функция φ_0^0 должна быть определена из одного функционального уравнения

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int\limits_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}, \tag{26}$$

к которому сводится система (22). При каждом λ эта система легко решается численно методом последовательных приближений.

Случай сферической индикатрисы рассеяния нами рассмотрен специально в отдельной статье [2], где приведены также таблицы численных значений функции φ_0^0 для различных λ, полученные указанным методом.

Вытянутая индикатриса рассеяния. Рассмотрим индикатрису типа

$$x(\cos\gamma) = 1 + x_1\cos\gamma. \tag{27}$$

Если $x_1>0$, то такая индикатриса вытянута в направлении $\gamma=0$, в случае $x_1<0$ она вытянута в направлении $\gamma=\pi$.

В этом случае наивысший порядок полиномов Лежандра в разложении индикатрисы равен единице. Поэтому (16) сводится к

$$R(\eta, \varphi; \eta_0, \varphi_0) = f_0(\eta, \eta_0) + f_1(\eta, \eta_0)\cos(\varphi - \varphi_0). \tag{28}$$

Что касается f_0 и f_1, то, согласно (21), они имеют следующую структуру:

$$f_0(\eta, \eta_0) = \frac{\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\eta_0) - x_1\,\varphi_1^0(\eta)\,\varphi_1^0(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}}, \quad f_1(\eta, \eta_0) = x_1\,\frac{\varphi_1^1(\eta)\,\varphi_1^1(\eta_0)}{\frac{1}{\eta} + \frac{1}{\eta_0}}. \tag{29}$$

При этом вспомогательные функции φ_0^0 и φ_1^0 определяются, согласно (22), из подсистемы

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0^0(\eta) &= 1 + \frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'} - \frac{\lambda}{2}\,x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'} \\ \varphi_1^0(\eta) &= \eta - \frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,\eta'd\eta}{\eta+\eta'} + \frac{\lambda}{2}\,x_1\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')\,\eta'd\eta'}{\eta+\eta'}, \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

а вспомогательная функция φ^1 из уравнения

$$\varphi_1^1(\eta) = \sqrt{1-\eta^2} + \frac{\lambda}{4}\,x_1\eta\varphi^1(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^1(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}. \tag{31}$$

Что касается последнего уравнения, то его можно численно решить последовательными приближениями. При этом удобно путем умножения на $\sqrt{1-\eta^2}$ и замены $\varphi_1^1(\eta)\sqrt{1-\eta^2} = \psi(\eta)$ привести его предварительно к виду:

$$\psi(\eta) = 1 - \eta^2 + \frac{\lambda x_1}{4}\,\eta\psi(\eta)\int_0^1 \frac{\psi(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}. \tag{32}$$

Система же (30) интересна тем, что между двумя функциями φ_0^0 и φ_0^1 существует некоторое простое соотношение. Для установления его преобразуем второе уравнение этой системы, заменяя

$$\frac{\eta'}{\eta+\eta'} = 1 - \frac{\eta}{\eta+\eta'}.$$

Тогда

$$\varphi_1^1(\eta) = 1 - \frac{\lambda}{2}\,\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \varphi_0^0(\eta')\,d\eta' + \frac{\lambda x_1}{2}\,\eta\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \varphi_1^0(\eta')\,d\eta' +$$

$$+ \frac{\lambda}{2}\,\eta^2\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'} - \frac{\lambda x_1}{2}\,\eta^2\varphi_1^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_1^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}.$$

Последние два члена, на основании первого из уравнений системы (30), мы можем заменить через

$$\eta\left(\varphi_0^0(\eta)-1\right).$$

Поэтому, если ввести постоянные

$$\alpha=\int_0^1 \varphi_0^0(\eta)\,d\eta, \qquad \beta=\int_0^1 \varphi_1^0(\eta)\,d\eta, \tag{33}$$

то

$$\varphi_1^0(\eta)=\frac{\left(1-\frac{\lambda}{2}\alpha\right)\eta\varphi_0^0(\eta)}{1-\frac{\lambda x_1}{2}\beta\eta}. \tag{34}$$

Таким образом, φ_1^0 выражается через φ_0^0, но при этом входят две постоянные α и β, которые определяются по (33). Первое из уравнений (30) совместно с (34) и (33) целиком определяет функции φ_0^0 и φ_1^0. Здесь также можно применить метод последовательных приближений. Численные значения функций φ_0^0, φ_1^0 и φ_1^1, полученные методом последовательных приближений, для различных λ и для $x_1=1$ приведены в табл. 1, 2, 3. Последовательные приближения повторялись до тех

Таблица 1

Значения вспомогательной функции $\varphi_0^0(\eta)$

Индикатриса рассеяния $x(\cos\gamma)=1+\cos\gamma$

η \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,054	1,070	1,088	1,109	1,134	1,166	1,248
0,2	1,080	1,106	1,136	1,171	1,215	1,276	1,450
0,3	1,097	1,130	1,168	1,216	1,276	1,365	1,642
0,4	1,108	1,146	1,192	1,249	1,324	1,439	1,829
0,5	1,115	1,157	1,208	1,274	1,362	1,502	2,013
0,6	1,119	1,163	1,219	1,291	1,391	1,535	2,194
0,7	1,120	1,167	1,226	1,304	1,414	1,599	2,375
0,8	1,120	1,167	1,230	1,312	1,431	1,637	2,552
0,9	1,118	1,166	1,230	1,317	1,443	1,669	2,730
1,0	1,115	1,164	1,228	1,318	1,452	1,696	2,909

пор, пока подстановка полученного численного решения в (30) и квадратуры, проведенные по формуле Симпсона, не давали левые части, равные с точностью до единицы третьего знака исходным. Поэтому точность полученных решений порядка единицы третьего знака.

При индикатрисе рассматриваемого типа особый интерес пред-

Таблица 2

Значения вспомогательной функции $\varphi_1^0(\eta)$

Индикатриса рассеяния $x(\cos\gamma) = 1 + \cos\gamma$

η \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,083	0,077	0,071	0,064	0,054	0,041	0,000
0,2	0,172	0,162	0,150	0,136	0,118	0,090	0,000
0,3	0,264	0,251	0,235	0,215	0,189	0,147	0,000
0,4	0,359	0,344	0,324	0,299	0,265	0,210	0,000
0,5	0,456	0,439	0,417	0,387	0,346	0,277	0,000
0,6	0,555	0,536	0,512	0,478	0,431	0,349	0,000
0,7	0,654	0,635	0,609	0,572	0,519	0,425	0,000
0,8	0,755	0,734	0,708	0,669	0,610	0,505	0,000
0,9	0,856	0,836	0,808	0,767	0,704	0,588	0,000
1,0	0,959	0,939	0,910	0,867	0,800	0,674	0,000

Таблица 3

Значения вспомогательной функции $\varphi_1^1(\eta)$

Индикатриса рассеяния $x(\cos\gamma) = 1 + \cos\gamma$

η \ λ	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	1,016	1,021	1,027	1,032	1,038	1,044	1,051
0,2	1,010	1,018	1,026	1,034	1,043	1,053	1,062
0,3	0,988	0,998	1,007	1,018	1,028	1,040	1,050
0,4	0,954	0,964	0,975	0,986	0,997	1,009	1,022
0,5	0,903	0,915	0,926	0,938	0,951	0,962	0,976
0,6	0,836	0,847	0,859	0,870	0,883	0,895	0,908
0,7	0,749	0,759	0,770	0,780	0,790	0,804	0,815
0,8	0,632	0,640	0,648	0,658	0,668	0,679	0,688
0,9	0,459	0,466	0,473	0,479	0,486	0,494	0,502
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

ставляет случай $\lambda=1$ (т. е. случай чистого рассеяния, когда поглощение отсутствует) при произвольном x_1. Оказывается, что в этом случае система (30) удовлетворится, если положить $\varphi_1^0=0$ и φ_0^0 равным решению (26) для сферической индикатрисы рассеяния.

В самом деле, положим в (30) $\lambda=1$ и $\varphi_1^0=0$. Тогда наши два уравнения сводятся к следующим:

$$\varphi_0^0(\eta) = 1 + \frac{\lambda}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}, \tag{35}$$

$$1 = \frac{1}{2}\varphi_0^0(\eta)\int_0^1 \frac{\varphi_0^0(\eta')\,\eta'\,d\eta'}{\eta+\eta'}. \tag{36}$$

Первое из этих уравнений тождественно с (26). Второе также равносильно (26). Для доказательства заменим во втором уравнении под знаком интеграла

$$\frac{\eta'}{\eta+\eta'}=1-\frac{\eta}{\eta+\eta'}.$$

Тогда оно сводится к

$$1=\frac{1}{2}\varphi_0^0(\eta)\int_0^1\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'-\frac{1}{2}\eta\varphi_0^0(\eta)\int_0^1\frac{\varphi_0^0(\eta')\,d\eta'}{\eta+\eta'}. \qquad (37)$$

С другой стороны, интегрируя (36) по η, находим:

$$1=\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1\frac{\eta'\varphi_0^0(\eta)\varphi_0^0(\eta')d\eta d\eta'}{\eta+\eta'}=\frac{1}{4}\int_0^1\int_0^1\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\eta')d\eta d\eta'=\frac{1}{4}\left[\int_0^1\varphi_0^0(\eta)d\eta\right]^2,$$

т. е.

$$\int_0^1\varphi_0^0(\eta)\,d\eta=2.$$

Подставляя это значение интеграла в (37), видим, что действительно (36) сводится к (26). Таким образом, при $\lambda=1$ оба уравнения (30) удовлетворяются, если φ_0^0 принять равным решению (26), а φ_1^0 равным нулю.

Принимая во внимание это обстоятельство, мы можем на основании (28) и (29) написать для функции отражения

$$R=\frac{\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\eta')}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta'}}+x_1\frac{\varphi_1^1(\eta)\,\varphi_1^1(\eta')}{\frac{1}{\eta}+\frac{1}{\eta'}}\cos(\varphi-\varphi').$$

Если мы усредним по азимуту, то второй член исчезнет, а мы придем к следующему замечательному результату.

В случае чистого рассеяния усредненная по азимуту функция отражения при вытянутой индикатрисе $x(\cos\gamma)=1+x_1\cos\gamma$ в точности равна функции отражения (25) при сферической индикатрисе рассеяния. При λ, отличных от единицы, это правило уже не будет иметь места.

Замечание о законе Ламберта. Наряду с функцией отражения $r(\eta,\ \varphi;\ \eta_0,\ \varphi_0)$ в фотометрии часто пользуются величиной

$$\rho=\frac{r}{\eta}=\frac{\lambda}{4\eta\eta_0}R,$$

называемой коэффициентом яркости.

Согласно эмпирическому закону Ламберта, для ряда тел (преимущественно белых, т. е. таких, для которых λ близко к единице) ρ постоянно.

В случае сферической индикатрисы рассеяния из (25) следует:

$$\rho = \frac{\lambda}{4} \; \frac{\varphi_0^0(\eta)\,\varphi_0^0(\eta_0)}{\eta + \eta}.$$

Таблица 4

Сферическая индикатриса рассеяния

Коэффициенты яркости при $\lambda = 1.0$

η \ η_0	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,0	—	3,12	1,81	1,37	1,14	1,01	0,913	0,849	0,798	0,758	0,728
0,1	3,12	1,95	1,51	1,28	1,14	1,05	0,977	0,926	0,884	0,852	0,825
0,2	1,81	1,51	1,32	1,19	1,11	1,04	0,994	0,957	0,925	0,900	0,878
0,3	1,37	1,28	1,19	1,13	1,07	1,03	1,00	0,975	0,953	0,946	0,918
0,4	1,14	1,14	1,11	1,07	1,05	1,02	1,00	0,987	0,972	0,961	0,951
0,5	1,01	1,05	1,04	1,03	1,02	1,01	1,00	0,997	0,988	0,981	0,977
0,6	1,913	0,977	0,994	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,998	0,998
0,7	0,849	0,926	0,957	0,975	0,987	0,997	1,00	1,01	1,01	1,01	1,02
0,8	0,798	0,884	0,925	0,953	0,972	0,988	1,00	1,01	1,02	1,02	1,03
0,9	0,758	0,852	0,900	0,946	0,961	0,981	0,998	1,01	1,02	1,03	1,04
1,0	0,728	0,825	0,878	0,918	0,951	0,977	0,998	1,02	1,03	1,04	1,06

Для ρ нами вычислена табл. 4 значений коэффициента яркости для разных пар значений η, η_0. Мы видим, что для углов θ и θ_0, не слишком близких к 90°, величина ρ почти постоянна и имеет значения, близкие к единице. На основании результатов предыдущего параграфа можно утверждать, что и при асферической индикатрисе рассеяния типа $x(\eta) = 1 + x_1\eta$ усредненный по азимуту коэффициент яркости почти постоянен и близок к единице.

Поскольку можно ожидать, что высшие члены в разложении индикатрисы по полиномам Лежандра, начиная с P_2, мало влияют на усредненные по азимуту значения коэффициента яркости, и основную роль играют лишь первые два члена разложения, то следует думать, что в некотором приближении наш вывод можно обобщить на произвольные индикатрисы рассеяния. Иными словами: при произвольной индикатрисе рассеяния и при $\lambda = 1$ усредненный по азимуту коэффициент яркости при не слишком больших углах с нормалью почти постоянен и близок к единице.

Таким образом, теория приводит к следующим выводам и ограничениям о степени применимости закона Ламберта:

1) он применим лишь к чисто рассеивающим средам;

2) он относится только к усредненному по азимуту коэффициенту яркости и не учитывает зависимости от азимута;

3) даже при этих ограничениях он справедлив только для не слишком больших углов падения и отражения (до 70°).

Изложенный выше метод решения классической задачи о рассеянии света легко обобщается на случай слоев конечной оптической толщины. Это будет показано в другой нашей статье*.

Филиал Ленинградского
государственного университета,
г. Елабуга

Поступило в редакцию
24 мая 1943 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Minnaert, Astrophysical Journal, **93**, 403, 1941.
2. Амбарцумян, Астрономический журнал, **19**, № 5, 1942.

---

* Указанного обобщения В. А. Амбарцумян не опубликовал. Позднее это было сделано С. Чандрасекаром („Перенос лучистой энергии“, Москва, 1953). *Ред.*